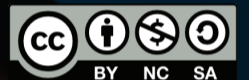


# Modelado del control de variables en problemas de proporcionalidad a través de autómatas finitos

Dos estudios de caso

Modeling the control of variables in proportionality problems through finite automata:  
two case studies

Modelagem do controle de variáveis em um problema de proporcionalidade através de  
autômatos finitos: dois estudos de caso



Maria Rocio **Abello Correa**  
Hugo **Escobar Melo**  
Jorge **Castaño Garcia**  
Cesar Julio **Bustacara-Medina**



2024

Revista Iberoamericana de

**Psicología**

ISSN-L: 2027-1786 | e-ISSN: 2500-6517

Publicación Cuatrimestral

Cerebro con una red en su interior: [Sasun Bughdaryan](#)

**Rip**  
**171**

Volumen 17 #1 ene-abr  
17 Años



Planeta Formación y Universidades

ID: [10.33881/2027-1786.rip.17102](https://doi.org/10.33881/2027-1786.rip.17102)

**Title:** Modeling the control of variables in proportionality problems through finite automata: two case studies

**Caption:** Two case studies

**Título:** Modelado del control de variables en problemas de proporcionalidad a través de autómatas finitos

**Subtítulo:** Dos estudios de caso

**Titulo:** Modelagem do controle de variáveis em um problema de proporcionalidade através de autómatos finitos

**Legendas:** Dois estudos de caso

**Alt Title / Título alternativo:**

[en]: Modeling the control of variables in proportionality problems through finite automata: two case studies

[es]: Modelado del control de variables en un problema de proporcionalidad a través de autómatas finitos: dos estudios de caso

[pt]: Modelagem do controle de variáveis em um problema de proporcionalidade através de autómatos finitos: dois estudos de caso

**Author (s) / Autor (es):**

Abello Correa, Escobar Melo, Castaño García & Bustacara-Medina

**Keywords / Palabras Clave:**

[en]: finite automata, cognition, control of variables, problem-solving, proportionality,

[es]: Autómatas finitos, Cognición, Control de variables, Solución de problemas, Proporcionalidad

[pt]: Autómatos finitos, Cognição, Controle de variáveis, Resolução de problemas, Proporcionalidade

**Financiación / Funding:**

Pontificia Universidad Javeriana-Convocatoria de proyectos interdisciplinarios

**Submitted:** 2023-10-18

**Accepted:** 2023-11-15

## Resumen

Este artículo expone el modelado mediante la técnica de autómatas finitos deterministas (AFD), del procedimiento de control de variables, por parte de resolutores de diferente edad y escolaridad, cuando resuelven un problema de proporcionalidad en una situación de movimiento rectilíneo constante. El estudio se enmarca en el contexto de la investigación que tiene por objeto caracterizar el cambio cognitivo cuando se resuelven tareas de proporcionalidad planteadas a través de un software interactivo. Para mostrar la potencialidad de la técnica de AFD se documenta el análisis de 2 casos, en términos de la frecuencia de transición hacia diferentes formas de utilización del control variables.

## Abstract

This paper presents the modelling technique of deterministic finite automata (DFA) of the procedure for controlling variables by solvers of different ages and educational backgrounds when solving a proportionality problem in a situation of constant rectilinear motion. The study is framed within the context of research aimed at characterizing cognitive change when solving proportionality tasks posed through interactive software. To demonstrate the potential of the DFA technique, the analysis of 2 cases is documented, regarding the frequency of transition towards different forms of using control variables.

## Resumo

Este artigo expõe a modelagem, utilizando a técnica de autómatos finitos determinísticos (AFD), do procedimento de controle de variáveis, por solucionadores de diferentes idades e escolaridades, quando resolvem um problema de proporcionalidade em uma situação de movimento retilíneo constante. O estudo enquadra-se no contexto de uma investigação que visa caracterizar a mudança cognitiva na resolução de tarefas de proporcionalidade colocadas através de software interativo. Para mostrar o potencial da técnica AFD, está documentada a análise de 2 casos, em termos da frequência de transição para diferentes formas de utilização do controle variável.

## Citar como:

Abello Correa, M. R., Escobar Melo, H., Castaño García, J., & Bustacara-Medina, C. J. (2024). Modelado del control de variables en problemas de proporcionalidad a través de autómatas finitos: Dos estudios de caso. *Revista Iberoamericana de Psicología*, 17 (1), 13-23. Obtenido de: <https://reviberopsicologia.iberu.edu.co/article/view/2837>

Dra Maria Rocio **Abello Correa**, MSc  
Psi  
ORCID: [0000-0002-8271-8141](https://orcid.org/0000-0002-8271-8141)

**Source | Filiacion:**  
Pontificia Universidad Javeriana

**BIO:**  
Psicóloga, Magister. Doctora en Ciencias Sociales Niñez y Juventud

**City | Ciudad:**  
Bogotá DC [co]

**e-mail:**  
[abellor@javeriana.edu.co](mailto:abellor@javeriana.edu.co)

Hugo **Escobar Melo**, MSc Psi  
Research ID: [Hugo-Melo](https://orcid.org/Hugo-Melo)  
ORCID: [0000-0002-8910-6172](https://orcid.org/0000-0002-8910-6172)

**Source | Filiacion:**  
Pontificia Universidad Javeriana

**BIO:**  
Psicólogo y Magister en Psicología

**City | Ciudad:**  
Bogotá DC [co]

**e-mail:**  
[escobarh@javeriana.edu.co](mailto:escobarh@javeriana.edu.co)

Dr Jorge **Castaño García**, Lic  
ORCID: [0000-0002-4252-0456](https://orcid.org/0000-0002-4252-0456)

**Source | Filiacion:**  
Profesor Pensionado

**BIO:**  
Doctor en Psicología Educativa.  
Licenciado Física y Matemática

**City | Ciudad:**  
Bogotá DC [co]

**e-mail:**  
[jorgecastagno@yahoo.es](mailto:jorgecastagno@yahoo.es)

Dr Cesar Julio **Bustacara-Medina**,  
MA Ing  
ORCID: [0000-0002-7478-2901](https://orcid.org/0000-0002-7478-2901)

**Source | Filiacion:**  
Pontificia Universidad Javeriana

**BIO:**  
Doctor en Ingeniería. Magíster en Ingeniería Eléctrica. Ingeniero de Sistemas

**City | Ciudad:**  
Bogotá DC [co]

**e-mail:**  
[cbustaca@javeriana.edu.co](mailto:cbustaca@javeriana.edu.co)

# Modelado del control de variables en problemas de proporcionalidad a través de autómatas finitos

## Dos estudios de caso

Modeling the control of variables in proportionality problems through finite automata: two case studies

Modelagem do controle de variáveis em um problema de proporcionalidade através de autômatos finitos: dois estudos de caso

Maria Rocio **Abello Correa**

Hugo **Escobar Melo**

Jorge **Castaño Garcia**

Cesar Julio **Bustacara-Medina**

## Introducción

En las sociedades del conocimiento e información cobra relevancia el uso de la ciencia y la tecnología para la toma de decisiones. La educación enfrenta el reto del desarrollo del razonamiento científico y en este contexto el razonamiento proporcional juega un papel fundamental. La investigación muestra que los estudiantes de educación básica enfrentan dificultades con situaciones que involucran este razonamiento (**Alvarado, 2011**). Por ejemplo, comprender la relación de proporcionalidad que existe entre una variable A y una B, requiere representar los cambios que se producen en una de las variables a medida que cambia la otra e identificar si el patrón de variación corresponde a una razón constante. Cuando intervienen tres variables, como es el caso de la tarea que se utiliza en este estudio (**distancia, velocidad y tiempo**), resulta más demandante cognitivamente; por lo que, la estrategia de controlar una de las dos variables, velocidad o tiempo, resulta eficaz.

En este estudio se utiliza la técnica de autómatas finitos deterministas (**de ahora en adelante AFD**) para modelar el control de variables dada la potencialidad heurística que posee para capturar los estados y transiciones que el resolutor hace. La pregunta de indagación es: ¿Cómo modelar mediante la técnica de los AFD los estados y transiciones en el cambio que se produce en el control de variables, cuando resolutores de diferente edad y escolaridad resuelven un problema de proporcionalidad de movimiento rectilíneo constante? por tanto, el objetivo es modelar, bajo AFD, los estados y transiciones del cambio producido en el control de variables cuando se resuelve un problema de proporcionalidad de movimiento rectilíneo uniforme.

# Razonamiento científico y control de variables

Uno de los principios centrales de dominio general del razonamiento científico, es la estrategia de control de variables, la cual constituye una habilidad específica para identificar la posible relación causal de una variable respecto a un efecto. Dicho razonamiento se vincula con la capacidad de hacer inferencias apropiadas a partir de resultados provenientes de experimentos. Para Schwichow et al. (2016) el control de variables posibilita suponer relaciones de causalidad; en el caso de este estudio, permite generar hipótesis no solo sobre la relación de dependencia de la distancia y los valores de velocidad (**V**) y tiempo (**T**), sino, además, sobre los valores a asignar a estas variables independientes para producir efectos deseables en la distancia recorrida por el móvil. Esta estrategia cognitiva simplifica y vuelve más eficiente la solución del problema, condición generalizable al diseño de experimentos que caracteriza el razonamiento científico (Osterhaus et al., 2015).

El control de variables es fundamental en la alfabetización científica y exige para su desarrollo una práctica rutinaria e instrucción adecuada (Schwichow et al., 2016). De acuerdo con Jones et al. (2022) son muchos los informes que aportan evidencia de las dificultades que tienen los niños para aprenderla.

Guerrero et al. (2020) concluyen que la mayoría de estudiantes evaluados (158) puntúan principalmente en el nivel transicional de un pensamiento empírico-inductivo o concreto a uno hipotético-deductivo o formal. En las subpruebas de pensamiento proporcional e identificación y control de variables, los alumnos de carreras no científicas obtuvieron porcentajes bajos.

Svirko et al. (2019) demuestran que la buena comprensión condicional de oraciones favorece la prueba de hipótesis a los 10 y 11 años. Además, indicaron que a la misma edad manejan la estrategia de control de variables, por lo cual, la comprensión de condicionales favorece el razonamiento científico.

Klahr et al. (2001) definen dos tipos de control de variables, Tschirgi (1980) propone tres. La primera corresponde a variar una cosa a la vez (**VOTAT**), la segunda en mantener una cosa a la vez (**HOTAT**), y la tercera consiste en una solución de cambio total (**CA**), en la que varía cada uno de los elementos. La estrategia VOTAT implica ser capaz de diseñar experimentos no confusos y derivar inferencias válidas a partir de la evidencia que arrojan los experimentos.

Utilizar una estrategia como VOTAT no es una habilidad que muchos resolutores dominen, incluso después de años de educación básica y secundaria (Klahr et al., 2001) puede que no se use de manera espontánea. Por su parte, Osterhaus et al. (2015) 402 niños y niñas (edades de 8, 9, y 10) indican que el control de variables requiere el uso de experimentos informativos, para contrastar una sola variable (focal) mientras se mantienen las otras variables constantes.

## Autómatas Finitos

La teoría de autómatas es una rama de la teoría de la computación que estudia las máquinas teóricas llamadas autómatas que constituyen modelos matemáticos de un sistema al permitir la manipulación de

cadena y secuencias, conformado por un conjunto de estados. Recibe como entrada una palabra (una serie de símbolos del alfabeto del autómata) y según éste, la máquina puede cambiar de estado (Delgado et al., 2011; Hopcroft et al., 2008; Hopcroft & Ullman, 1969). Es importante mencionar que el estado en que se encuentra el sistema resume la información con referencia a entradas anteriores, condición fundamental, para determinar el comportamiento del sistema con las entradas siguientes.

Un autómata se puede definir formalmente como una máquina matemática  $M$  formada por 5 elementos  $M = (\Sigma, Q, s, F, \delta)$  donde,  $\Sigma$  es un alfabeto de entrada,  $Q$  es un conjunto finito de estados,  $s$  es el estado inicial,  $F$  es un conjunto de estados finales o de aceptación y  $\delta$  (delta) es una relación o función de transición.

Normalmente la función de transición realiza los siguientes pasos:

- Toma un estado y un símbolo de entrada como argumentos.
- Regresa un estado.

Una "regla" de  $\delta$  se escribe como  $\delta(q, a) = p$ , donde  $q$  y  $p$  son estados y  $a$  es un símbolo de entrada. Si el autómata está en un estado  $q$  y recibe una entrada  $a$ , entonces el autómata va al estado  $p$  (puede ser al mismo estado, es decir,  $q = p$ ).

## Representación de los autómatas

Existen dos formas de representar un autómata, mediante tablas de transición o mediante diagramas de transición.

### Tablas de transición

Son representaciones tabulares convencionales de una función. Dicha representación es un arreglo (o matriz) bidimensional cuyos elementos proporcionan el resumen de las transiciones del autómata. Las filas de la tabla corresponden a los estados y las columnas a las entradas. La entrada para la fila correspondiente al estado  $s$  y la columna correspondiente a la entrada  $a$  es el estado  $\delta(s, a)$ . Por ejemplo, si se tiene un autómata con un conjunto de estados  $\{s_0, s_1, s_2, s_3\}$  y dos entradas al sistema  $\{0, 1\}$ , la tabla de transiciones estará conformada como muestra la Tabla 1.

Tabla 1

Matriz de transición de estados

Estado	Entrada	
	0	1
$s_0$	$s_3$	$s_1$
$s_1$	$s_2$	$s_0$
$s_2$	$s_1$	$s_3$
$s_3$	$s_0$	$s_2$

De acuerdo con la Tabla 1, si el sistema se encuentra en el estado  $s_0$  y recibe una entrada cuyo valor es cero (0), el sistema pasará a un estado  $s_3$ , y si el valor de entrada es uno (1) el sistema pasará al estado  $s_1$  y así sucesivamente.

## Diseño y tipo de estudio

El presente ejercicio analítico de corte cualitativo, corresponde al estudio de dos casos, de muestra intencional no probabilística, utilizando la técnica de los autómatas finitos deterministas (AFD) para modelar el cambio de los resolutores y determinar los cambios de los estados, segmentos, trayectos y trayectorias, que siguen al manipular las variables para resolver el problema.

## Participantes

Dos resolutores de diferentes grados de escolaridad, típicos de la población estudiada, que asisten regularmente a sus clases, en el Colegio Antonio José Uribe, ubicado en la ciudad suramericana de Bogotá D.C., en Colombia. Xavi: género femenino, segundo de primaria, rango de edad 7-8 años; y Ena: género masculino sexto grado de primaria, rango de edad 11 – 12 años.

## Instrumento

El problema de proporcionalidad de movimiento rectilíneo constante fue presentado a los resolutores bajo un software interactivo denominado "URANUS", versión 2. En la parte izquierda de la Figura 2 se puede observar el espacio de la tarea, donde se simula el desplazamiento de un sujeto-actor de acuerdo con los valores de entrada que asigne el resolutor. En la parte derecha se presentan dos relojes para la asignación de valores a las dos variables (V1 y V2) para generar el desplazamiento a cierta distancia Di.



Figura 2. Interfaz de la tarea

El resolutor tiene 15 intentos para asignar valores a V1 y a V2 con el fin de acercarse a la meta.

## Procedimiento

El estudio se llevó a cabo en 4 fases:

- Fase 1:** Aplicación de la tarea-problema bajo el software Uranus versión 2.
- Fase 2:** Modelación del control de variables en el proceder de los resolutores.
- Fase 3:** Descripción de los tipos de control más frecuentes en los dos casos estudiados.
- Fase 4:** Discusión de los resultados.

## Diagramas de transición

Un autómata constituye grafos dirigidos, donde cada nodo representa un estado del sistema. Los nodos se conectan por medio de arcos para indicar la posibilidad de pasar de un estado si a un estado sj. El diagrama simboliza los estados que puede tomar un componente o un sistema y muestra los eventos que implican el cambio de un estado a otro (Aho et al., 1988, Hopcroft et al., 2008; Hopcroft & Ullman et al., 1969). En la Figura 1 aparecen cuatro posibles estados  $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}$  y los arcos representan las transiciones entre ellos. Cada arco lleva una etiqueta que indica qué símbolo de entrada provoca la transición correspondiente.

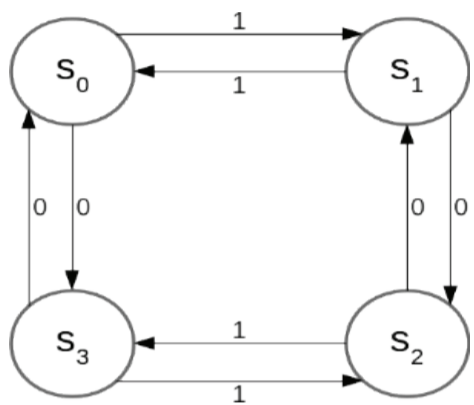


Figura 1. Diagrama de estados de un autómata.

## Autómatas Finitos Deterministas (AFD)

Los autómatas se pueden clasificar como, Autómatas Finitos (AF), si el conjunto de estados es contable y en caso contrario, como Autómatas No-Finitos (ANF), también de acuerdo a la forma en que se realiza el cambio de estado, como Autómata Finito Determinista (AFD), cuando se conoce a qué estado pasará el sistema a partir de una entrada específica, y en caso contrario, como Autómata Finito No-Determinista (AFND).

En esta indagación, se usan Autómatas Finitos Deterministas (AFD), dado que se cuenta con un número finito de estados y siempre se conoce a qué estado pasará el sistema a partir de las entradas.

Formalmente, un autómata finito determinista es una quintupla  $(\Sigma, Q, \delta, S_0, F)$ , donde  $Q$  representa un conjunto finito NO VACIO de estados,  $\Sigma$  representa un alfabeto de entrada,  $\delta$  es la función de transición que especifica a qué estado pasa el autómata desde el estado actual al recibir un símbolo de entrada,  $S_0$  es un elemento del conjunto  $Q$  que indica el estado inicial del autómata, y finalmente,  $F$  es un subconjunto de  $Q$  que indica el conjunto de estados finales.

## Método

A partir de la investigación de contexto y referencia de Escobar et al. (2016) cuyo propósito fue caracterizar el cambio cognitivo de los sujetos cuando resuelven tareas de proporcionalidad, se decidió, usar autómatas finitos deterministas (AFD) para describir las posibles transiciones que siguen los resolutores, permitiendo modelar completamente el espacio de solución y caracterizar el control de variables.

# Técnica de análisis y modelado del control de variables

Para modelar el sistema de control de variables para el problema de proporcionalidad se identificó, el alfabeto de entrada ( $\Sigma$ ), el conjunto finito de estados ( $Q$ ), el estado inicial ( $s$ ), el conjunto de estados finales ( $F$ ) y la función de transición ( $\delta$ ).

Para el alfabeto de entrada ( $\Sigma$ ), se caracterizaron todos los valores que pueden tomar las variables de Velocidad ( $V$ ) y Tiempo ( $T$ ), para el ejemplo, Variable1 ( $V$ ) y Variable2 ( $T$ ). Se definieron valores enteros entre cero (0) y cien (100) con sus correspondientes variaciones de valores. Esto implica que los valores actuales que se ingresan se comparan con respecto a los valores inmediatamente anteriores, es decir, si el resolutor ingresa valores para la Variable1 ( $V$ ), se comparan los valores del par  $V_i$  y  $V_{i-1}$ , y se describe el tipo de variación en términos de si se incrementó, decrementó, o se mantuvo constante el valor inicial; de forma semejante se hace con la Variable2 ( $T$ ), lo cual permite obtener el conjunto:  $\Sigma = \{V_+, V_-, V_+, T_+, T_-, T_+\}$ . Siguiendo a Escobar et al. (2016), se diferencia cuando la variación es muy pequeña, es decir, valores inferiores a tres (3) unidades. Teniendo esto en cuenta, se incluyen cuatro símbolos al alfabeto de entrada, de tal forma que el resultado es  $\Sigma = \{V_{++}, V_+, V_-, V_-, T_{++}, T_+, T_-, T_-, T_-\}$ . Estas variaciones implican cinco (5) posibles cambios para cada variable, por ejemplo, para la Variable1 se tiene:

- $V_{++}$  = aumentar el valor (más de dos unidades),
- $V_+$  = aumentar el valor de manera fina (dos unidades máximo),
- $V_-$  = disminuir el valor (más de dos unidades),
- $V_-$  = disminuir el valor de manera fina (dos unidades máximo)
- $V_=$  = no cambiar el valor (mantener la variable constante).

Como el sistema se representa con dos entradas, el alfabeto de entrada corresponde a la combinación de las variables, obteniendo veinticinco (25) posibles entradas al sistema, como se presenta a continuación:

$$\Sigma = \left\{ \begin{matrix} (V_{++}, T_{++}) & (V_{++}, T_+) & (V_{++}, T_-) & (V_{++}, T_-) & (V_{++}, T_=) \\ (V_+, T_{++}) & (V_+, T_+) & (V_+, T_-) & (V_+, T_-) & (V_+, T_=) \\ (V_-, T_{++}) & (V_-, T_+) & (V_-, T_-) & (V_-, T_-) & (V_-, T_=) \\ (V_-, T_{++}) & (V_-, T_+) & (V_-, T_-) & (V_-, T_-) & (V_-, T_=) \\ (V_-, T_{++}) & (V_-, T_+) & (V_-, T_-) & (V_-, T_-) & (V_-, T_=) \end{matrix} \right\}$$

Para modelar el conjunto de estados ( $Q$ ) del AFD, se utiliza el conjunto de combinaciones de las diferentes entradas al sistema para obtener todos los posibles estados como muestra la Tabla 2. Las transiciones se presentan de acuerdo con el estado actual (filas) y las entradas (columnas). Si el resolutor incrementa los valores de las dos variables,  $V$  y  $T$ , se obtienen dos posibles estados,  $a$  y  $j$ . El estado  $a$  corresponde a cambios superiores a dos (2) unidades en alguna de las dos variables, mientras que el estado  $j$  a un cambio inferior o igual a dos unidades en las dos variables.

Para el caso, cuando las dos variables se decrementan, se obtienen dos posibles estados,  $e$  (cambios superiores a dos (2) unidades) y  $m$  (cambios inferiores o iguales a dos (2) unidades). Cuando se incrementa una variable y la otra se decrementa, se tienen dos posibilidades. La primera corresponde a incrementar la variable  $V$  y decrementar la variable  $T$ . En este caso se obtienen dos posibles estados  $b$  (cambios superiores a dos (2) unidades) y  $k$  (si el cambio de las dos variables es inferior o igual a dos unidades). La segunda corresponde a decrementar la variable  $V$  e incrementar la variable  $T$ . En este caso se obtiene el estado  $d$  (superiores a dos (2) unidades) y  $l$  (inferior o igual a dos unidades). Finalmente, si alguna de las variables, ya sea  $V$  o  $T$  se mantiene constante ( $V_=$  o  $T_=$ ), es decir, el resolutor aplica una estrategia de control de variables (HOTAT), se pueden obtener los estados  $c, f, g, h$ , según sea el caso. Para el problema propuesto resulta igual utilizar la estrategia de control de variables HOTAT o VOTAT.

Tabla 2

Estados del sistema

	$T_{++}$	$T_+$	$T_-$	$T_-$	$T_=$
$V_{++}$	a	a	b	b	c
$V_+$	a	j	b	k	c
$V_-$	d	d	e	e	f
$V_-$	d	l	e	m	f
$V_=$	g	g	h	h	i

La Tabla 2 muestra los posibles estados del sistema ( $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ ) en función de las posibles entradas (25), correspondientes a los valores asignados a las variables, en términos de incrementos o decrementos, recíprocos o inversos; dos variables que se decrementan; incremento de una y decremento de la otra; y, mantenimiento constante de las variables.

Tabla 3

Matriz de transición de estados

Estado	Entrada																								
	$V_{++}, T_{++}$	$V_{++}, T_+$	$V_{++}, T_-$	$V_{++}, T_-$	$V_{++}, T_=$	$V_+, T_{++}$	$V_+, T_+$	$V_+, T_-$	$V_+, T_-$	$V_+, T_=$	$V_-, T_{++}$	$V_-, T_+$	$V_-, T_-$	$V_-, T_-$	$V_-, T_=$	$V_-, T_{++}$	$V_-, T_+$	$V_-, T_-$	$V_-, T_-$	$V_-, T_=$	$V_-, T_{++}$	$V_-, T_+$	$V_-, T_-$	$V_-, T_-$	$V_-, T_=$
a	a	a	b	b	c	a	j	k	b	c	d	d	e	e	f	d	l	m	e	f	g	g	h	h	i
b	a	a	b	b	c	a	j	k	b	c	d	d	e	e	f	d	l	m	e	f	g	g	h	h	i
c	a	a	b	b	c	a	j	k	b	c	d	d	e	e	f	d	l	m	e	f	g	g	h	h	i
d	a	a	b	b	c	a	j	k	b	c	d	d	e	e	f	d	l	m	e	f	g	g	h	h	i
e	a	a	b	b	c	a	j	k	b	c	d	d	e	e	f	d	l	m	e	f	g	g	h	h	i
f	a	a	b	b	c	a	j	k	b	c	d	d	e	e	f	d	l	m	e	f	g	g	h	h	i
g	a	a	b	b	c	a	j	k	b	c	d	d	e	e	f	d	l	m	e	f	g	g	h	h	i
h	a	a	b	b	c	a	j	k	b	c	d	d	e	e	f	d	l	m	e	f	g	g	h	h	i

Estado	Entrada																								
	$V_{++}, T_{++}$	$V_{++}, T_{+}$	$V_{++}, T_{-}$	$V_{++}, T_{\dots}$	$V_{++}, T_{=}$	$V_{+}, T_{++}$	$V_{+}, T_{+}$	$V_{+}, T_{-}$	$V_{+}, T_{\dots}$	$V_{+}, T_{=}$	$V_{-}, T_{++}$	$V_{-}, T_{+}$	$V_{-}, T_{-}$	$V_{-}, T_{\dots}$	$V_{-}, T_{=}$	$V_{\dots}, T_{++}$	$V_{\dots}, T_{+}$	$V_{\dots}, T_{-}$	$V_{\dots}, T_{\dots}$	$V_{\dots}, T_{=}$	$V_{=}, T_{++}$	$V_{=}, T_{+}$	$V_{=}, T_{-}$	$V_{=}, T_{\dots}$	$V_{=}, T_{=}$
<b>i</b>	a	a	b	b	c	a	j	k	b	c	d	d	e	e	f	d	l	m	e	f	g	g	h	h	i
<b>j</b>	a	a	b	b	c	a	j	k	b	c	d	d	e	e	f	d	l	m	e	f	g	g	h	h	i
<b>k</b>	a	a	b	b	c	a	j	k	b	c	d	d	e	e	f	d	l	m	e	f	g	g	h	h	i
<b>l</b>	a	a	b	b	c	a	j	k	b	c	d	d	e	e	f	d	l	m	e	f	g	g	h	h	i
<b>m</b>	a	a	b	b	c	a	j	k	b	c	d	d	e	e	f	d	l	m	e	f	g	g	h	h	i

En la Tabla 3, si el sistema se encuentra en el estado a (primera fila) y la entrada es el valor  $(V_{++}, T_{++})$ , que corresponde a la primera columna, el sistema permanece en el estado a. Si el sistema se encuentra en el estado b (segunda fila) y la entrada es el valor  $(V_{++}, T_{+})$ , el sistema pasará al estado a y así sucesivamente.

El conjunto de entradas será la variación de los valores del intento previo con respecto a los valores del intento actual. La Figura 3 muestra el conjunto de estados y las posibles transiciones del espacio de solución del problema de proporcionalidad (no se incluyeron los estados j, k, l, m por visualización). Para representar el grafo se utiliza una matriz de transición de estados que se va construyendo a medida que el resolutor resuelve el problema.

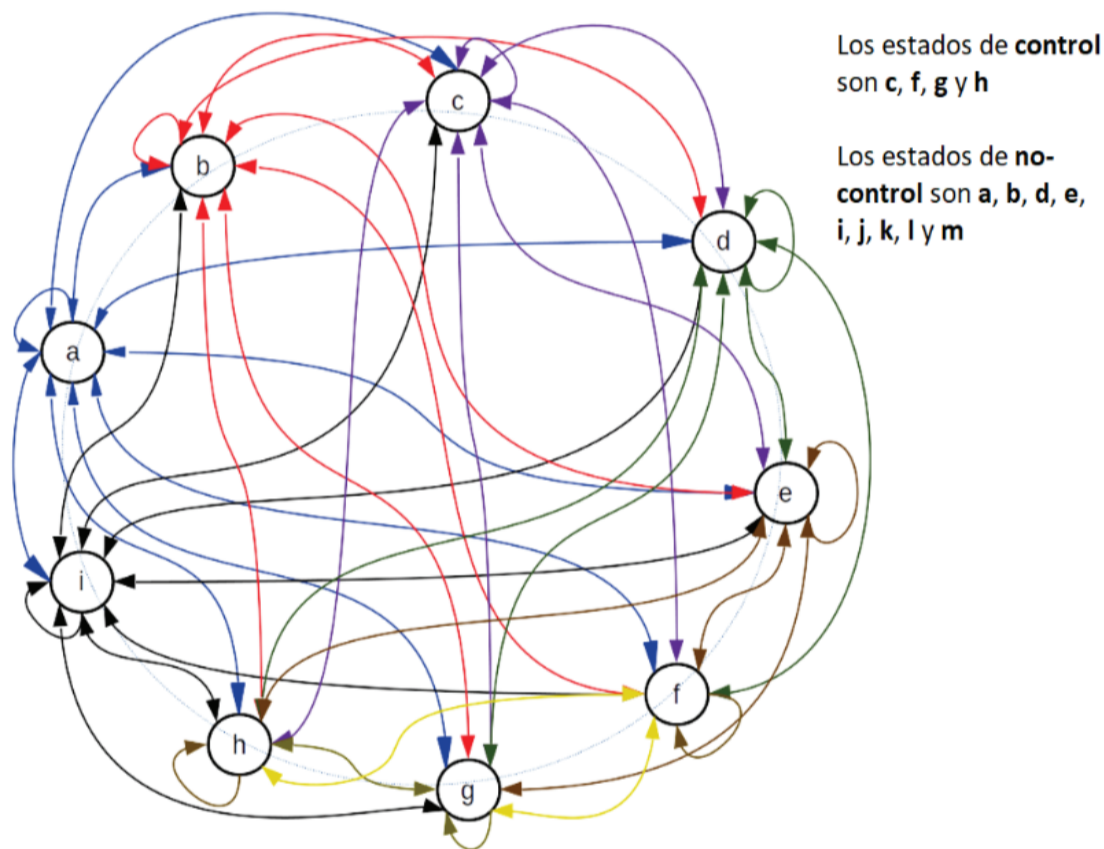


Figura 3. Diagrama de estados del AFD con sus posibles transiciones

Con base en los intentos sucesivos del resolutor, se van generando estados y con ellos se pueden identificar dos tipos de segmentos: control y no-control. A diferencia de Escobar et al. (2016) que identificaron tres (3) tipos de segmentos de control y tres (3) de no-control, en este estudio se proponen cuatro (4) tipos derivados de la matriz de transición de estados para control y no-control, respectivamente.

Las categorías de segmentos de no-control son:

- ➔ **No control creciente (sncc):** surge cuando el resolutor mantiene una secuencia de estados de tipo a, lo que se caracteriza por incrementar el valor de las dos variables simultáneamente.
- ➔ **No control decreciente (sncd):** cuando el resolutor mantiene la misma secuencia de estados e, que se caracteriza por decrementar el valor de las dos variables simultáneamente.

- ➔ **No control con alternancia (snca):** el resolutor incrementa una variable y decrementa la otra, o viceversa. Es decir, pasa de una secuencia de estados b a una secuencia de estados d y viceversa.
- ➔ **No control oscilante (snco):** cuando en el estado anterior el resolutor incrementa una variable y decrementa la otra y para alcanzar el estado actual hace lo opuesto. Ello supone que, si en el estado anterior se realizó una transición de b a d, y en la transición actual se ejecuta lo opuesto, se pasa de d a b.

Las categorías propuestas de segmentos de control son:

- ➔ **Control simple creciente (scsc):** se genera cuando el resolutor mantiene constante una variable e incrementa la otra, es decir, realiza un control de variables de tipo HOTAT o VOTAT creciente. Lo anterior implica obtener una serie de estados, ya sea de tipo c ó g.

- **Control simple decreciente (scsd):** cuando el resolutor mantiene constante una de las variables y disminuye la otra, realiza control de variables de tipo HOTAT o VOTAT decreciente. Ello genera una serie de estados h o una serie de estados f.
- **Control oscilante (sco):** en una secuencia de dos transiciones el resolutor cambia la variable que mantiene controlada. Es decir, en la primera transición mantiene constante la variable V y en la segunda T o viceversa, no importa si la otra variable independiente se aumenta o se reduce.
- **Cambio controlado (scc):** cuando la variación en cualquiera de las dos variables ya sea positiva o negativa no excede las dos unidades. Este es un caso particular en el cual el resolutor hace un control de grano-fino para alcanzar la meta, se genera una serie de estados j, k, l y/o m.

Los trayectos que se construyen a partir de los diferentes tipos de segmentos pueden ser de control y no-control. Para obtener un trayecto de control (tc) se agrupan los segmentos consecutivos de control simple creciente (scsc), control simple decreciente (scsd), control oscilante (sco) y cambio controlado (scc). Para obtener un trayecto de no-control (tnc) se unen todos los segmentos consecutivos de no-control, en este caso los segmentos de no-control creciente (sncc), no-control decreciente (sncd), no-control con alternancia (snca) y no-control oscilante (snco). Finalmente, estos trayectos permiten generar trayectorias que identifican la forma de proceder de un resolutor. De acuerdo

con Escobar et al.(2016) las trayectorias se clasifican en cuatro categorías (Tabla 4):

- **Trayectoria sin control:** cuando la secuencia de trayectos inicia y finaliza con trayectos de no-control (tnc).
- **Trayectoria con control:** cuando en la secuencia de trayectos se encuentra al inicio y al final un trayecto de control (tc). Se pueden encontrar dos subcategorías. La primera corresponde a una secuencia de control no consolidada, es decir, cuando se encuentran trayectos intermedios de no-control (tnc). La segunda corresponde a una secuencia de control consolidada, en la cual no se presentan trayectos intermedios de no-control (tnc).
- **Trayectoria desmejorante:** cuando la secuencia de trayectos inicia con un trayecto de control y termina con un trayecto de no-control, sin importar que pasa en los trayectos intermedios.
- **Trayectoria mejorante:** cuando la serie de trayectos inicia con uno de no-control y termina con uno de control. Se pueden identificar dos subcategorías. La primera es una trayectoria mejorante con intermitencia, conformada por una serie de trayectos con intermedios de no-control. La segunda es una trayectoria mejorante sin intermitencia, conformada por una serie de trayectos que no contiene elementos intermedios de no-control.

Tabla 4

Categorización de las trayectorias

Tipo de trayectoria	Subcategoría
SIN CONTROL Empieza y termina sin control	
CON CONTROL Empieza y termina con control	NO CONSOLIDADO Hay trayectos intermedios de no control
	CONSOLIDADO No hay trayectos intermedios de no control
DESMEJORANTE Empieza con control y termina sin control	
MEJORANTE Empieza sin control y termina con control	CON INTERMITENCIA Hay trayectos intermedios de no control
	SIN INTERMITENCIA No hay trayectos intermedios de no control

La Tabla 4 permite observar que la mejor trayectoria de un resolutor inicia sin control de variables y termina con control de las mismas, donde se pueden inferir, según sea el caso, estados intermedios de no control y control de las variables.

sobre la confidencialidad, y el numeral 6 sobre el bienestar del usuario; y el artículo 50 sobre los principios éticos de respeto y dignidad lo mismo que salvaguardar el bienestar y los derechos de los participantes. Se informó de la protección de los datos de los participantes garantizada bajo la Ley 1266 de 2008, conocida como Ley de Habeas Data. Se aplicó el asentimiento informado para los participantes menores de edad.

## Consideraciones éticas

La investigación se ciñó a la ley 1090 de 2006, por la cual se reglamenta el ejercicio de la profesión de Psicología en Colombia, se dicta el código deontológico y bioético y otras disposiciones, especialmente en el artículo 2, numeral 3 sobre estándares morales y legales; el numeral 5

## Resultados

Con base en la propuesta de autómatas finitos deterministas, se presenta el modelado para los dos (2) casos.



### Caso 1 (Xavi):

Este caso presenta una trayectoria de control mejorante sin intermitencia (Tabla 5). El resolutor inicia con un trayecto de no-control de longitud uno (1) y finaliza con uno de control de longitud dos (2), en los primeros intentos no realiza ningún tipo de control de variables y a partir del tercero permanece en estados de control.

Tabla 5

Síntesis cuantitativa y cualitativa de la trayectoria del caso 1

	Intento1	Intento2	Intento3	Intento4	Intento5
Variable1 (V)	100	34	81	100	90
Variable2 (T)	60	100	100	100	100
Meta	66.67	37.78	90.00	111.11	100.00
Transiciones	d	c	c	f	
Segmentos	snca	scsc	scsd		
Longitud	1	2	1		
Trayectos	tnc	tc			
Longitud	1	2			
Trayectoria	mejorante sin intermitencia				
Longitud	2				

La Figura 4 presenta el diagrama de transición de estados derivado del conjunto de entradas realizado por el resolutor, en la cual se muestra que los estados visitados son **d, c, y f**.

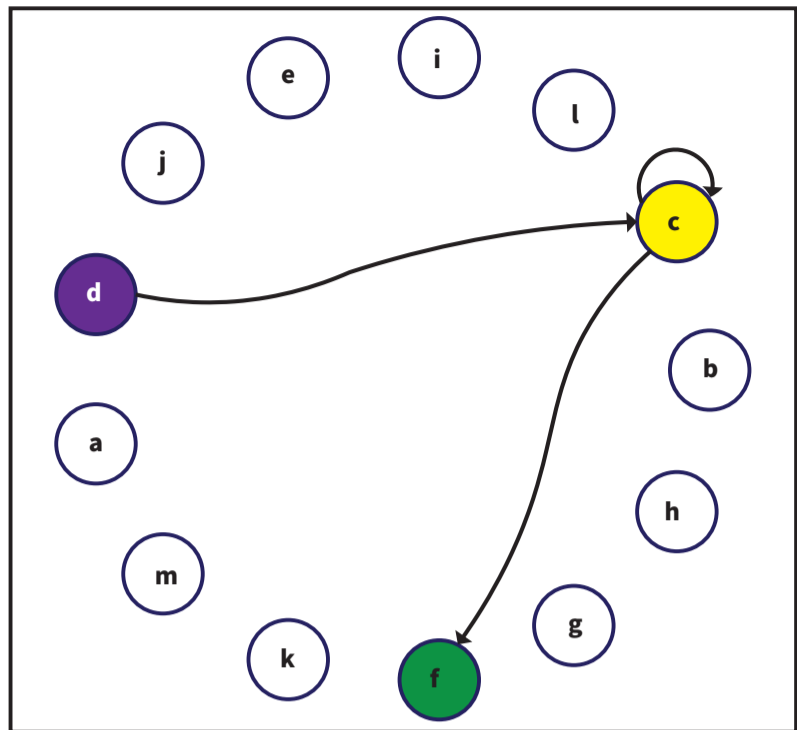


Figura 4. Diagrama de transición de estados – caso 1

La Figura 5 muestra las transiciones de entre los diferentes segmentos que realiza el resolutor. Inicia en un segmento snca, pasa a uno scsc y finaliza en uno de tipo scsd.

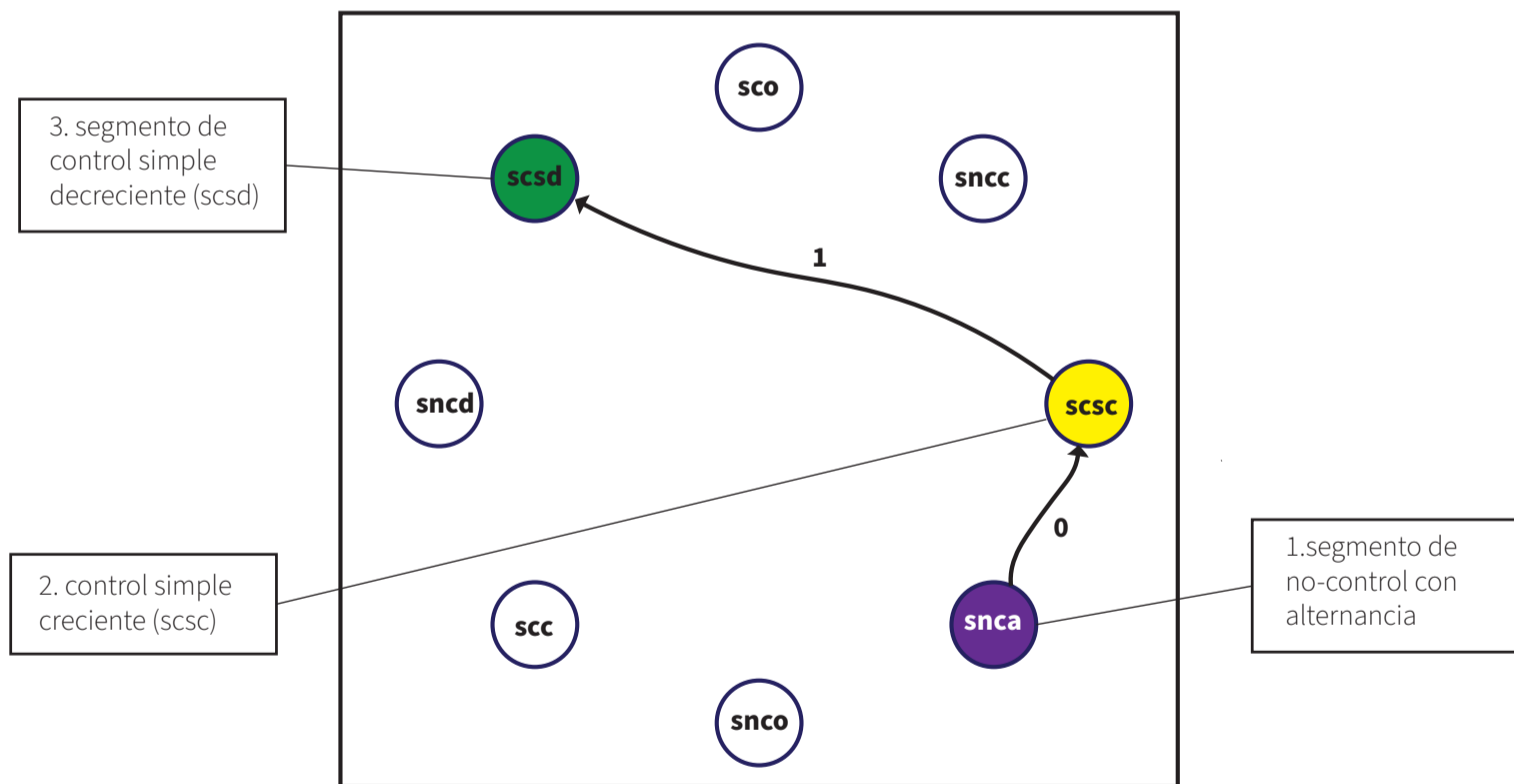


Figura 5. Diagrama de transición de segmentos – caso 1

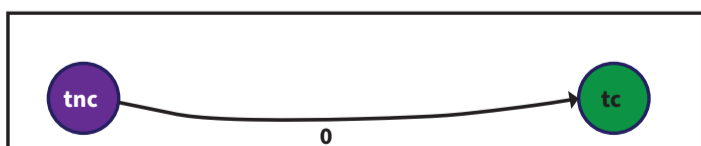


Figura 6. Diagrama de transición de trayectos – caso 1

Finalmente, en la Tabla 6 se muestra la trayectoria seguida por el resolutor (Xavi) para resolver el problema, así como su longitud. En este caso, el número de trayectos es dos, y no se presentan trayectos intermedios.

Tabla 6

Trayectoria – caso 1

Trayectoria	MEJORANTE SIN INTERMITENCIA
Longitud	2

### Caso 2 (Ena)

En este caso se presenta una trayectoria de control mejorante con intermitencia, tal como se muestra la Tabla 7.

Tabla 7

Síntesis cuantitativa y cualitativa de la trayectoria del caso 2

	Intento 1	Intento 2	Intento 3	Intento 4	Intento 5	Intento 6	Intento 7	Intento 8	Intento 9	Intento 10
Variable1	21	39	71	84	100	47	1	15	76	83
Variable2	40	76	87	100	100	100	1	9	91	91
Meta	10.77	38.00	79.19	107.69	128.21	60.26	0.00	1.73	88.67	96.83
Transiciones	a	a	a	c	F	e	a	a	c	
Segmentos	sncc	scsc	scsd	sncd	sncc	scsc				
Longitud	3	1	1	1	2	1				
Trayectos	tnc	tc	tnc	tc						
Longitud	1	2	2	1						
Trayectoria	mejorante con intermitencia									
Longitud	4									

El comportamiento de este resolutor cambia entre trayectos de no-control, control, no-control y finalmente alcanza uno de control, lo que caracteriza la trayectoria como mejorante con intermitencia. Se puede plantear la conjetura de que el proceder del sujeto se guía bajo el incremento de los valores de las dos variables, para llegar a la meta en el intento 4. En el siguiente intento, controla la variable V2 y continúa aumentando el valor de la V1, como si no anticipara que así sobrepasaría la meta. En los posteriores intentos, se guía por la conjetura de incrementar el valor de las variables retroalimentado por el resultado de aproximaciones cada vez más cercanas a la meta, hace control de variables del penúltimo al último intento, controla la variable V2 y alcanza la meta.

Asmoro et al. (2021) y Koerber y Osterhaus (2021) afirman que no basta con lograr la comprensión de la ciencia como un producto, con la aprehensión de sus constructos e ideas centrales como leyes, teorías o simbología, sino, que es necesario, fortalecer el desarrollo de habilidades cognitivas, que ayuden a pensar mejor, es decir, con un sentido crítico de la ciencia. Al respecto Martínez-Suárez (2022) establecen que es necesario propender por el desarrollo del pensamiento científico, a través, de estrategias pedagógicas y didácticas articuladas a políticas y directrices curriculares, que resulten consecuentes con las necesidades sociales, políticas y éticas de los estudiantes de secundaria, así como también, profundizar en la comprensión conceptual, dada su naturaleza histórica, compleja y multidisciplinar.

La exploración investigativa aportó evidencia empírica sobre la potencia heurística de la técnica de los autómatas finitos deterministas, para modelar los distintos estados, sus transiciones y la secuencia de intentos caracterizados en segmentos, trayectos y trayectorias. Esta técnica permitió calcular todos los estados posibles de combinatorias para V1 y V2 en lo relativo a incrementos y decrementos de grano grueso y grano fino, además de los estados en los que V1 o V2 permanecen constantes. De esta forma, el modelo es aplicable a la solución del problema por parte de cualquier resolutor.

El estudio al abordar dos estudios de casos, es limitado, sin embargo, permite plantear líneas de investigación futuras, con muestras mayores y diversos grados de escolaridad, en la perspectiva de modelar mediante la técnica de AFD, la covariación de los resolutores, además del análisis sobre la predictibilidad de las transiciones de los estados, a través de cadenas de Markov.

La discusión está abierta y es lícito afirmar que el espíritu científico requiere de la comprensión de habilidades de razonamiento, donde se destaca el manejo cada vez más elaborado del control de variables.

## Discusión

Modelar el control de variables a través de AFD en el contexto del problema propuesto a los resolutores, ha producido teórica y metodológicamente, una categorización más fina de dicho control, a la referenciada previamente por Escobar et. al. (2016). Además, ha permitido identificar distintos tipos de estados y sus transiciones, como también, los segmentos, los trayectos y las trayectorias, en el proceder de los sujetos.

Los resultados evidencian una rica variabilidad intrasubjetiva e intersubjetiva en las trayectorias de los resolutores, lo que confirma la multiplicidad de rutas en el proceder de los participantes y confronta críticamente el camino de una sola ruta procedimental al resolver un problema. Los hallazgos del análisis de los dos casos presentados muestran diferentes tipos de no-control y de control, en el paso a paso, de la resolución del problema, con oscilaciones de trayectos de no-control y de control, que caracterizan las trayectorias de los dos casos: mejorante con intermitencia y mejorante sin intermitencia.

A partir de esto se confirma la evidencia acumulada en los estudios sobre razonamiento científico de las dificultades que tienen niños y jóvenes para controlar variables. En este contexto se evidencia la necesidad crucial del aprendizaje del control de variables para un adecuado razonamiento científico. Desde esta perspectiva, es de esperarse que la transición de estados de no-control a estados de control, se vea beneficiada a partir de la enseñanza intencional.

## Referencias

Aho, A., Hopcroft, J., & Ullman, J. (1988). Estructura de datos y algoritmos. Addison Wesley.

Alvarado, S. (2011). El razonamiento proporcional en la educación primaria: un estudio con alumnos de 6 grado en una escuela pública del distrito federal. Universidad Pedagógica Nacional.

- Asmoro, S. P., Suciati, & Prayitno, B. A. (2021). Empowering Scientific Thinking Skills of Students with Different Scientific Activity Types through Guided Inquiry. *International Journal of Instruction*, 14(1), 947-962. <https://doi.org/10.29333/iji.2021.14156a>
- Delgado, G., Valdez, J., & Guevara, P. (2011). Autómatas finitos: su aplicación para describir la trayectoria de un vehículo evasor de obstáculos. *Revista de Divulgación Científica y Tecnológica*, 16(60), 1-12.
- Escobar, H., Abello, R., & Castaño, J. (2016). Trayectorias de control y covariación de variables como expresión del cambio cognitivo en la solución de un problema. *Universitas Psychologica*, 15(1), 281-302. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.upsy15-1.tccv>
- Guerrero G, Tecpan S., Rojas S., & Joglar C.L. (2020). Caracterización del nivel de razonamiento científico en futuros profesores: desafíos para la formación inicial docente. *Formación Universitaria*, 13(5), 45-56. <https://doi.org/10.4067/S0718-50062020000500045>
- Hopcroft, J., Motwani, R., & Ullman, J. (2008). *Introducción a la teoría de autómatas, lenguajes y computación* (3ra ed.). Pearson Education, Inc.
- Hopcroft, J., & Ullman, J. (1969). *Formal languages and their relation to automata*. Addison Wesley.
- Bramley, N., Jones, A., Gureckis, T.M., & Ruggeri, A. (2022). Children's failure to control variables may reflect adaptive decisionmaking. *Psychonomic Bulletin & Review*, 29, 2314-2324. <https://doi.org/10.3758/s13423-022-02120-1>
- Klahr, D., Chen, Z., & Toth, E. (2001). From Cognition to Instruction to Cognition: A Case Study in Elementary School Science Instruction. *Designing for Science: Implications from Professional, Instructional, and Everyday Science*, 215-255.
- Koerber, S., & Osterhaus, C. (2021). Science competencies in kindergarten: a prospective study in the last year of kindergarten. *Unterrichtswiss*, 49, 117-136. <https://doi.org/10.1007/s42010-020-00093-5>
- Martínez-Suárez, D. G. (2022). Pensamiento científico en la educación secundaria: acercamiento al estado de la cuestión. *Trilogía Ciencia Tecnología Sociedad*, 14(27), e2150. <https://doi.org/10.22430/21457778.215>
- Osterhaus, C., Koerber, S., & Sodian, B. (2015). Children's understanding of experimental contrast and experimental control: an inventory for primary school. *Frontline Learning Research*, 3(4), 56-94.
- Schwichow, M., Croker, S., Zimmerman, C., Höffler, T., & Härtig, H. (2016). Teaching the control-of-variables strategy: A meta-analysis. *Developmental Review*, 39, 37-63.
- Svirko, E., Gabbott, E., Badger, J., & Mellanby, J. (2019). Does acquisition of hypothetical conditional sentences contribute to understanding the principles of scientific enquiry? *Cognitive Development*, 51, 46-57. <https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2019.05.008>
- Tschirgi, J. E. (1980). Sensible Reasoning: A Hypothesis about Hypotheses. *Child Development*, 51(1), 1-10. <https://doi.org/10.2307/1129583>